3/12/15

$v_1 \dots v_n \in V$. Πώς μπορούμε να αποφανθούμε αν $w \in \langle v_1 \dots v_n \rangle$ ή όχι.

$w \in W$

Απάντηση: Έστω ότι $\lambda_1 \dots \lambda_n \in F$ με $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
=> οδηγεί σε γραμμικό σύστημα (Σ) με
n-αγνώστους $\lambda_1, \dots \lambda_n$

Αν το (Σ) έχει λύση => $w \in \langle v_1, \dots v_n \rangle$

Αν το (Σ) είναι αδύνατο => $w \notin \langle v_1, \dots v_n \rangle$

Πχ. $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \iff$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο! Άρα $w \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.

Γράφουμε $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ => οδηγεί σε ομογενές σύστημα (Σ).

Το (Σ) έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\iff$ $v_1 \dots v_n$ γραμμικώς ανεξάρτητα

Το (Σ) έχει και μη τετριμμένες λύσεις $\Leftrightarrow$ $v_1 \dots v_n$ γραμμ. εξαρτημένα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $v_1, \dots v_n \in V$ γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε κάθε μη κενό υποσύνολο των v_1, v_n είναι επίσης γραμμ. ανεξάρτητα.
Απόδειξη (Ειδική περίπτωση για $n=3$)
Υποθέτουμε v_1, v_2, v_3 γραμμ. ανεξάρτητα αλλά v_1, v_2 γραμμικά εξαρτημένα και θα καταλήξουμε σε αντίφαση.
Αφού v_1, v_2 γραμμ. εξαρτημένα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ όχι και τα δύο μηδέν με $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \overset{(1)}{=} 0_V$
Άρα για $\lambda_3 = 0_F$, η (1) $\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_V + 0_F v_3 = 0_V \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ γραμμ. εξαρτημένα.
Αντίφαση!

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $v_1, v_2 \dots v_n \in V$. Υποθέτουμε ότι ένα μη κενό υποσύνολο των $v_1 \dots v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε και τα $v_1 \dots v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Απόδειξη
Όμοια με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης

Ορισμός: Έστω V δ.χ./F και $v_1, \dots, v_n \in V$. Η πεπερασμένη ακολουθία $v_1, v_2, \dots v_n$ λέγεται διατεταγμένη βάση του V ή απλά βάση του V αν:

i) $V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$

ii) Τα $v_1 \dots v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παραδείγματα !!!

i) $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

~~Ισχυρισμός~~: e_1, e_2, e_3 βάση του V

Απόδειξη

Βήμα 1ο: $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, γιατί με $(\alpha, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$(\alpha, b, c) = \alpha e_1 + b e_2 + c e_3$

Βήμα 2ο: e_1, e_2, e_3 γραμμ. ανεξάρτητα. Πράγματι

έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$

Άρα e_1, e_2, e_3 γραμμ. ανεξάρτητα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: e_1, e_2, e_3 βάση του $\mathbb{R}^3$ σαν $\mathbb{R}$-διαν. χώρος.

Γενικά για F σώμα, αν θέσουμε $V = F^n$ σαν F-διαν. χώρος με την ίδια απόδειξη έχουμε ότι ο F^n έχει βάση τα διανύσματα

$e_1 = (1_F, 0, 0 \dots 0)$, $e_2 = (0, 1_F, 0, \dots 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1_F)$

Η $e_1, e_2, \dots e_n$ λέγεται κανονική βάση του F^n.

Παράδειγμα: Έστω $V = F^{3\times 2}$ σαν F-διαν. χώρος.
Ορίζουμε $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ισχυρισμός $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$ βάση του $V = F^{3\times 2}$

ΒΗΜΑ 1ο: Έστω $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \in V$

Έχουμε $A = a E_{11} + b E_{12} + c E_{21} + d E_{22} + c E_{31} + f E_{32}$

Συμπέρασμα: $V = \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32} \rangle$

Ισχυρισμός: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$ γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι έστω $\lambda_1, \dots \lambda_6 \in F$, με
$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{21} + \lambda_4 E_{22} + \lambda_5 E_{31} + \lambda_6 E_{32} = 0_V = \emptyset_{3\times 2} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_F & 0_F \\ 0_F & 0_F \\ 0_F & 0_F \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0_F$ Άρα γραμμ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του V

Ομοίως αν $\nu \geq 1$, $\mu \geq 1$ και $V = F^{\nu\times\mu}$ σαν δ.χ. επί του F. Το V έχει βάση $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \mu\}$
και $E_{ij} \in F^{\nu\times\mu}$ είναι ο $\nu\times\mu$ πίνακας που στη (i,j) θέση έχει στοιχείο 1_F και παντού αλλού έχει στοιχείο 0_F.

Συμβολισμός / Ορισμός: Έστω F σώμα και $n \geq 0$. Θέτουμε
$F_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n : a_i \in F\} \subseteq F[x]$.

Τότε $F_n[x]$ με τις συνήθεις πράξεις διαν. χώρος επί του F.

Παράδειγμα: $F_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_i \in F\}$

Ισχυρισμός: Το σύνολο $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ βάση του $F_3[x]$.

Απόδειξη: Παρόμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα (Άσκηση !)

Πιο γενικά αν $n \geq 1$, τα ακόλουθα πολυώνυμα $1, x, x^2, x^3 \ldots x^n$ είναι βάση του $F_n[x]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω V δ.χ. επί του F και $v_1, v_2, \ldots v_n$ βάση του V. Αν $v \in V$ τότε <u>υπάρχουν μοναδικά</u> $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in F$ με $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

Απόδειξη

Αφού $V = \langle v_1, \ldots v_n \rangle$ και $w \in V$, έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ με $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ (1)

Θ.δ.ο. $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ είναι και μοναδικά. Έστω ότι επιπλέον $w = \lambda_1' w_1 + \ldots + \lambda_n' w_n$ (2)

Τότε $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_1' v_1 + \ldots + \lambda_n' v_n \Rightarrow$
$(\lambda_1 - \lambda_1') v_1 + (\lambda_2 - \lambda_2') v_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_n') v_n = 0_V$ (3)

Αφού $v_1, v_2, \ldots, v_n$ γραμ. ανεξάρτητα (ως βάση) η (3) $\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_1' = 0_F$, $\lambda_2 - \lambda_2' = 0_F$, …, $\lambda_n - \lambda_n' = 0_F$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1'$, $\lambda_2 = \lambda_2'$, … $\lambda_n = \lambda_n'$. Άρα δείξαμε τη μοναδικότητα

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $v_1, \dots v_n$ βάση του V. Τότε η απεικόνιση $T: F^n \to V$ με $T((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n)) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ είναι 1-1 και επί.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $v_1 \dots v_n$ (διατεταγμένη) βάση του V και $w \in V$ με $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n v_n$ με $\lambda_i \in F$. Λέμε ότι το λ_i είναι η i-συντεταγμένη του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $v_1 \dots v_n$.

Θεώρημα: Έστω F σώμα και V πεπερασμένα παραγόμενος διαν. χώρος επί του V. Τότε i) υπάρχει βάση $v_1, v_2 \dots v_n$ του V για κάποιο $n \geq 1$.
ii) αν $w_1, w_2, \dots, w_m$ είναι επίσης βάση του V τότε $n = m$.
(δηλ. κάθε δύο βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων). (χωρίς απόδειξη)

Ορισμός: Αν $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος επί του F και $v_1 \dots v_n$ βάση του V θέτουμε $\dim V = n$ και λέμε ότι έχει διάσταση n.

Από το θεώρημα η διάσταση είναι καλά ορισμένη δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης.

Παράδειγμα 1) Είδαμε ότι η F^n έχει (σαν F διαν. χώρος) βάση $e_1 = (1_F, 0_F, \dots 0_F)$, $e_2 = (0_F, 1_F, \dots 0_F), \dots$
$e_n = (0_F, 0_F, \dots 0_F, 1_F)$ Άρα $\dim F^n = m$

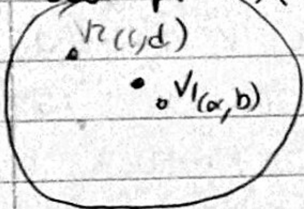
Παράδειγμα 2) Είδαμε ότι ο $F^{\nu\times\mu}$ έχει βάση $\{E_{ij} : 1\le i\le \nu,\ 1\le j\le \mu\}$

Συμπέρασμα $\dim_F F^{\nu\times\mu} = \nu\cdot\mu$

3) Είδαμε, ότι για $n\ge 1$ ο $F_n[x]$ έχει βάση $1, x, x^2, \dots, x^n$. Άρα $\dim F_n[x] = n+1$

Παράδειγμα

Αφού $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ από το θεώρημα κάθε βάση του $\mathbb{R}^2$ έχει δύο στοιχεία.



Ισχυρισμός: Έστω $v_1=(\alpha,b)$, $v_2=(c,d)\in\mathbb{R}^2$. Τα v_1, v_2 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$$

(Δηλ. π.χ. αφού $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = -2\neq 0$ τα $v_1=(1,2)$ $v_2=(3,4)$ βάση του $\mathbb{R}^2$

Ενώ αφού $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix} = 0$ τα $v_1=(1,2)$, $v_2=(3,6)$ Όχι βάση του $\mathbb{R}^2$)

Με άλλα λόγια v_1, v_2 βάση του $\mathbb{R}^2 \iff$ $v_1\neq(0,0)$ ΚΑΙ $v_2\neq(0,0)$ και το v_2 δεν είναι στην ευθεία που ορίζουν τα $(0,0)$ και v_1